Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2016 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ

Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов для ЕГЭ по математике 2016 года (профильный уровень).

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме и уровне сложности.

Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2016 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов — в кодификаторах элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена 2016 г. по математике.

Вариант состоит из двух частей и содержит 21 задание.

Часть 1 состоит из 9 заданий базового уровня сложности.

Часть 2 содержит 12 заданий повышенного и высокого уровней сложности, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Задания В1–В14 с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Задания С1–С7 с развёрнутым ответом.

Правильное решение каждого из заданий В1-В14 оценивается одним баллом.

Правильное решение каждого из заданий С1, С2 и С3 оценивается- 2 баллами; С4 и С5 — 3 баллами; С6 и С7 —4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 34 балла.

Верное выполнение не менее пяти заданий варианта КИМ отвечает минимальному уровню подготовки, подтверждающему освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования.

Структура варианта КИМ допускает проведение экзамена как по полному тексту, так и только по части 1 для проверки освоения базового уровня.

К каждому заданию с развёрнутым ответом, включённому в демонстрационный вариант, предлагается одно из возможных решений. Приведённые критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов, система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике.

Инструкция по выполнению работы
Профильный уровень

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 9 заданий базового уровня сложности с кратким ответом.

Часть 2 содержит 8 заданий повышенного уровня сложности с кратким ответом и 4 задания высокого уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–14 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

Ответ: *–0,8* . 

При выполнении заданий С1–С7 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1

В школе 800 учеников, из них 30% — ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 20% изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается?

Решение.

Учеников начальной школы $800 \cdot 0{,}3 = 240$, а учеников средней и старшей школы — $800 - 240 = 560$. Значит, немецкий язык в школе изучают

$560 \cdot 0{,}2 = 112$ учеников.

Ответ: 112.

<u>или</u>

Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

Решение.

Пусть заработная плата Марии Константиновны составляет x рублей. Тогда

$$x - 0{,}13x = 9570 \Leftrightarrow 0{,}87x = 9570 \Leftrightarrow x = 9570 : 0{,}87 \Leftrightarrow x = 11\,000.$$

Значит, зарплата Марии Константиновны составляет 11 000 рублей.

Ответ: 11 000.

<u>или</u>

В сентябре 1 кг винограда стоил 60 рублей, в октябре виноград подорожал на 25%, а в ноябре еще на 20%. Сколько рублей стоил 1 кг винограда после подорожания в ноябре?

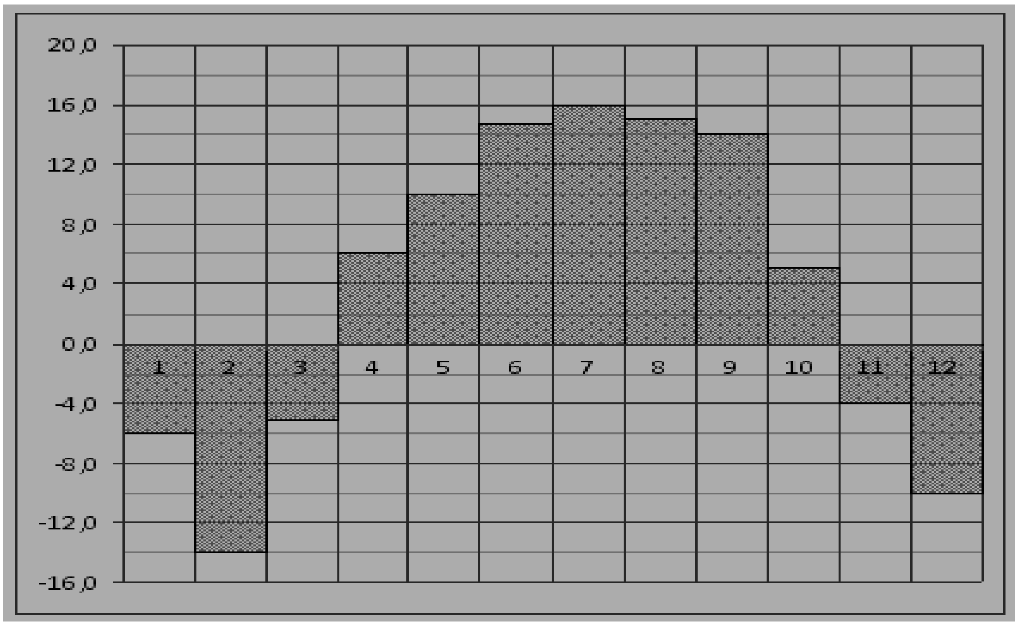
Решение.

В октябре виноград подорожал на $60 \cdot 0{,}25 = 15$ рублей и стал стоить $60 + 15 = 75$ рублей. В ноябре виноград подорожал на $75 \cdot 0{,}2 = 15$ рублей. Значит, после подорожания в ноябре 1 кг винограда стоил $75 + 15 = 90$ рублей.

Ответ: 90.

B2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 4 градуса Цельсия.

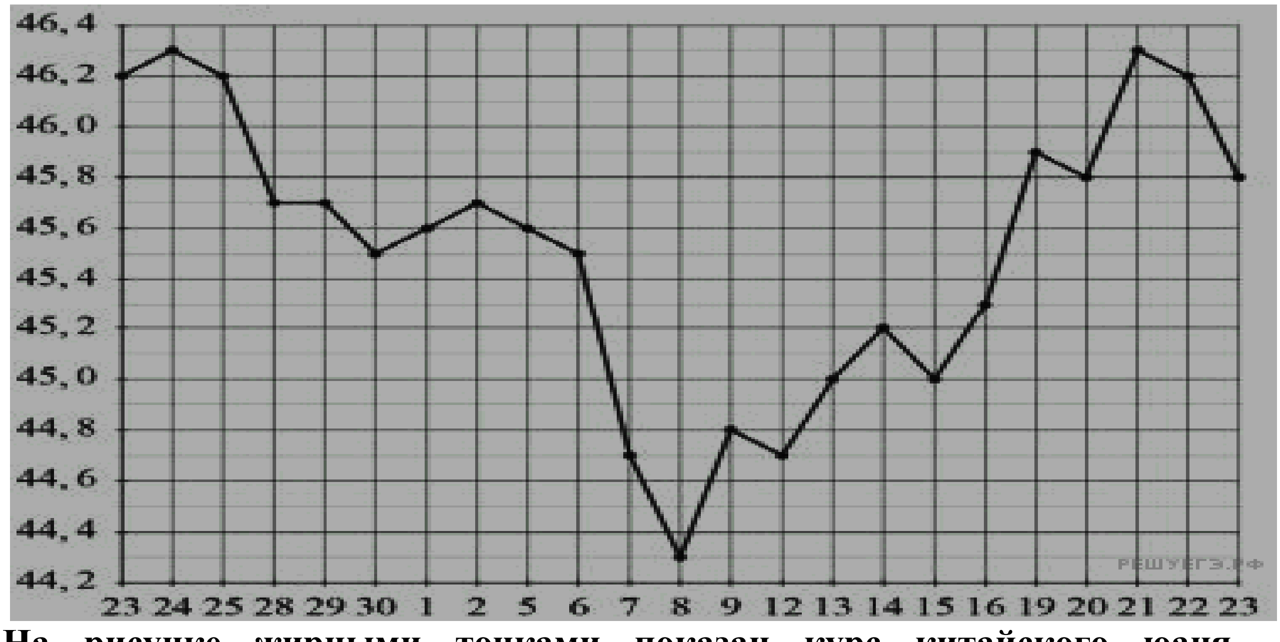


*Решение***.**

Из диаграммы видно, что было 7 месяцев, когда среднемесячная температура превышала 4 градуса Цельсия (см. рисунок).

Ответ: 7.

<u>или</u>



На рисунке жирными точками показан курс китайского юаня, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 23 сентября по 23 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена китайского юаня в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс китайского юаня за указанный период. Ответ дайте в рублях.

Решение.

Из рисунка видно, что наименьший курс китайского юаня был установлен 8 октября и составил 44,3.

Ответ:44,3

В3

Для группы иностранных гостей требуется купить 30 путеводителей. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Цена путеводителя и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Интернет-магазин	**Цена одного путеводителя (руб.)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Дополнительные условия**
А	255	350	нет
Б	270	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 8000 р.
В	245	450	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 7500 р.

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

*Решение***.**

Рассмотрим все варианты.

При покупке в магазине А цена тридцати путеводителей составит 7650 руб., с доставкой — 8000 руб.

При покупке в магазине Б цена тридцати путеводителей составит 8100 руб., доставка будет бесплатной.

При покупке в магазине В цена тридцати путеводителей составит 7350 руб., с доставкой — 7800 руб.

Следовательно, наименьшая стоимость покупки с учётом доставки составляет 7800 руб.

Ответ: 7800.

<u>или</u>

В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	**Тверь**	**Липецк**	**Барнаул**
Пшеничный хлеб (батон)	11	12	14
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	240	215	260
Мясо (говядина) (1 кг)	260	280	300
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 2 батона пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Решение.

В Твери стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит 11·2 + 9·3 + 1,5· 260 + 1·38 = 477 руб.

В Липецке стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит 12 ·2 + 13·3 + 1,5·280 + 1·44 = 527 руб.

В Барнауле стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит 14·2 + 16·3 + 1,5·300 + 1·50 = 576 руб.

Самый дешёвый набор продуктов можно купить в Твери по цене 477 руб.

Ответ: 477

<u>или</u>

Для транспортировки 45 тонн груза на 1300 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

Перевозчик	**Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)**	**Грузоподъемность автомобилей (тонн)**
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

Решение.

Рассмотрим все варианты.

Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *А* понадобится 13 автомобилей. Стоимость перевозки каждым из них составит 32 . 1300 = 41 600 руб. Полная стоимость перевозки 41 600 . 13 = 540 800 руб.

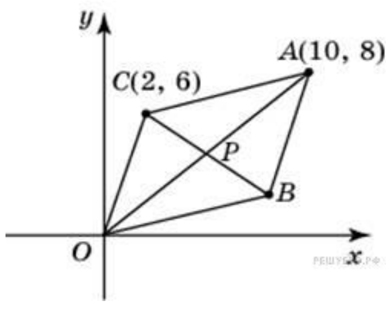
Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *Б* понадобится 9 автомобилей. Стоимость перевозки каждым из них составит 41 . 1300 = 53 300 руб. Полная стоимость перевозки 53 300 . 9 = 479 700 руб.

Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *В* понадобится 4 автомобиля. Стоимость перевозки каждым из них составит 95 . 1300 = 123 500 руб. Полная стоимость перевозки 123 500 . 4 = 494 000 руб.

Стоимость самой дешевой перевозки составит 479 700 руб.

Ответ: 479 700.

B4 **Точки *O*(0; 0), *A*(10; 8), *B*(8; 2), *C*(2; 6) являются вершинами четырехугольника. Найдите абсциссу точки *P* пересечения его диагоналей.**



Решение.

$BA = \sqrt{(10-8)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{40}$,

$OC = \sqrt{(2-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{40}$,

$OB = \sqrt{(8-0)^2+(2-0)^2} = \sqrt{68}$, $CA = \sqrt{(10-2)^2+(8-6)^2} = \sqrt{68}$.

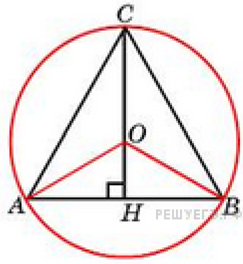
Противоположные стороны попарно равны, четырехугольник является параллелограммом, значит, точка *P* является серединой отрезка *CB*. Поэтому координаты точки *P* вычисляются следующим образом:

$x = \dfrac{2+8}{2} = 5$, $y = \dfrac{6+2}{2} = 4$.

Ответ: 5.

или

Высота правильного треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Решение.

Треугольник ABC правильный, значит, все углы равны по 60°. По теореме синусов имеем:

$$R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{CH}{2\sin A\cdot\sin B} = \frac{3}{2\sin^2 60^\circ} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 2.$$

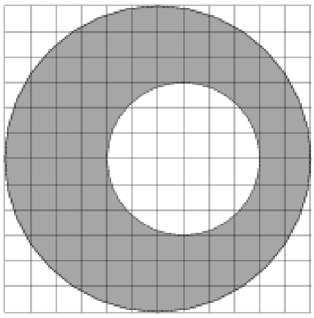
Ответ: 2.

*Приведём другое решение***.**

В правильном треугольнике радиус описанной окружности равен двум третьим высоты. Поэтому он равен 2.

или

На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 1. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Решение.

Площади кругов относятся как квадраты их радиусов. Радиус внешнего круга равен 6, радиус внутреннего равен 3. Поскольку радиус большего круга вдвое больше радиуса наименьшего круга, площадь большего круга вчетверо больше площади меньшего. Следовательно, она равна 4. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площадей кругов: 4 − 1 = 3.

Ответ: 3.

B5

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 10 очков. Результат округлите до сотых.

Решение.

Количество исходов, при которых в результате броска игральных костей выпадет 10 очков, равно 3: 4+6, 5+5, 6+4. Каждый из кубиков может выпасть шестью вариантами, поэтому общее число исходов равно $6\cdot 6 = 36$. Следовательно, вероятность того, что в сумме выпадет 10 очков, равна

$\dfrac{3}{36} = 0,083\ldots$

Ответ: 0,08.

или

Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Решение.

За первые три дня будет прочитан 51 доклад, на последние два дня планируется 24 доклада. Поэтому на последний день запланировано 12 докладов. Значит, вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции, равна $\frac{12}{75} = 0{,}16$

Ответ: 0,16.

<u>или</u>

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Решение.

Обозначим «1» ту сторону монеты, которая отвечает за выигрыш жребия «Физиком», другую сторону монеты обозначим «0». Тогда благоприятных комбинаций три: 110, 101, 011, а всего комбинаций $2^3 = 8$: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Тем самым, искомая вероятность равна:

$\frac{3}{8} = 0{,}375.$

Ответ: 0,375.

B6 **Решите уравнение $\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1$.**

Решение.

Заметим, что $1 = \log_5 5$ и используем формулу $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$. Имеем:

$$\log_5(7-x) = \log_5(3-x) + 1 \Leftrightarrow \log_5(7-x) = \log_5(3-x) + \log_5 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x > 0, \\ 7 - x = 5(3-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > -3, \\ 7 - x = 15 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

<u>или</u>

Найдите корень уравнения: $x = \frac{6x-15}{x-2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение.

Область допустимых значений: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

При $x \neq 2$ домножим на знаменатель:

$$x = \frac{6x-15}{x-2} \Leftrightarrow x(x-2) = 6x - 15 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 5; \\ x &= 3. \end{aligned}\right.$$

Оба корня лежат в ОДЗ. Больший из них равен 5.

Ответ: 5.

<u>или</u>

Решите уравнение $\mathbf{2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}}$**.**

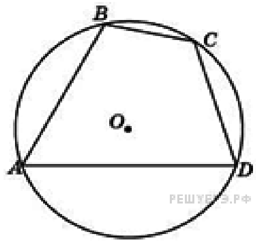
*Решение***.**

Перейдем к одному основанию степени:

$$2^{3+x}=0,4\cdot5^{3+x}\Leftrightarrow\frac{2^{3+x}}{5^{3+x}}=0,4\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{3+x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{1}\Leftrightarrow3+x=1\Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: -2.

B7



Точки ***A, B, C, D*****, расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги** ***AB, BC, CD и AD*****, градусные величины которых относятся соответственно как 4:2:3:6. Найдите угол A четырехугольника** ***ABCD*****. Ответ дайте в градусах.**

Решение.

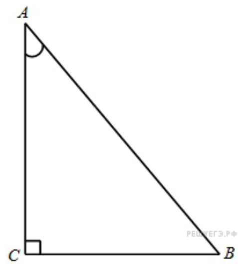
пусть дуга AB равна $4x,$ тогда $4x+2x+3x+6x=360^\circ\Leftrightarrow x=24^\circ.$

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит,

$$\angle A=\frac{1}{2}(\cup BC+\cup CD)=\frac{1}{2}(2x+3x)=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ.$$

Ответ: 60.

<u>или</u>



В треугольнике ***ABC*** **угол C равен 90°,** $\mathbf{\cos A = \frac{4}{\sqrt{17}}}$**.**

Найдите tg ***A*****.**

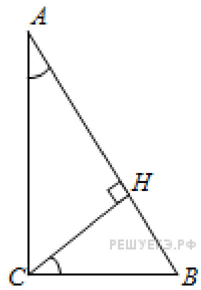
Решение.

$$\operatorname{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}=\frac{\sqrt{1-\frac{16}{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}}=\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}=0,25.$$

Имеем:

Ответ: 0,25.

<u>или</u>



В треугольнике ***ABC*** **угол** ***C*** **равен** ***90°*****,** ***CH*** **– высота,**

$\boldsymbol{BC = 4\sqrt{5}}$ **,** ***BH*** **= 4. Найдите** ***tg A*****.**

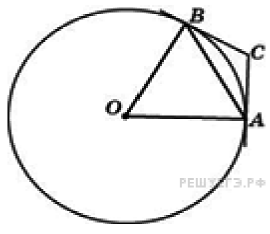
*Решение***.**

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}\angle HCB=\frac{HB}{CH}=\frac{HB}{\sqrt{CB^2-HB^2}}=\frac{4}{\sqrt{80-16}}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

или



Через концы ***A, B*** **дуги окружности в** ***62°*** **проведены касательные** ***AC и BC*****. Найдите угол** ***ACB*****. Ответ дайте в градусах.**

Решение.

Угол между касательной и хордой равен половине заключенной между ними дуги. В треугольнике ABC:

$$\angle ACB=180^\circ-(\angle BAC+\angle CBA)=180^\circ-\cup AB=180^\circ-62^\circ=118^\circ.$$

Ответ: 118.

B8

Прямая y= -4x - 11 является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований: $\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$. В нашем случае имеем:

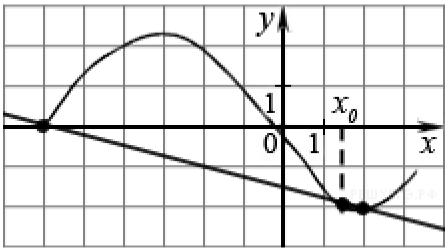
$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 7 = -4, \\ x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x + 11 = 0, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{11}{3}, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0\ (*). \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания −1.

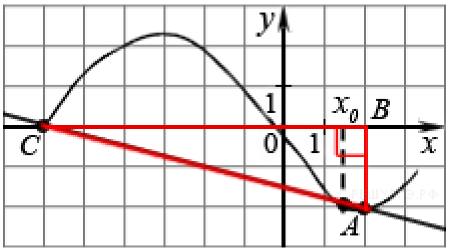
Ответ: −1

<u>или</u>

На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Решение.



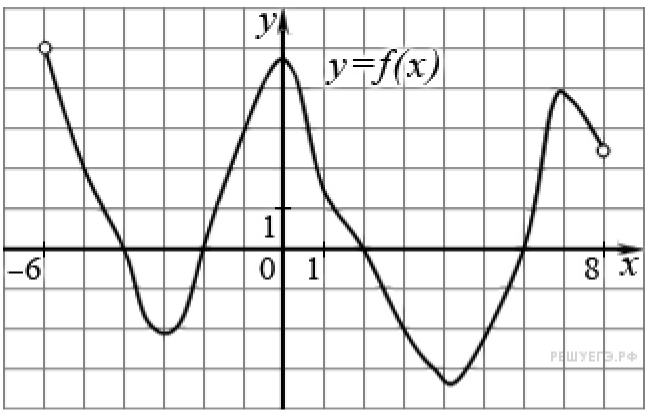
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках *A* (2; −2), *B* (2; 0), *C* (−6; 0). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом *ACB*:

$$y'(x_0) = \mathrm{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\mathrm{tg}\,\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25.$$

Ответ: −0,25.

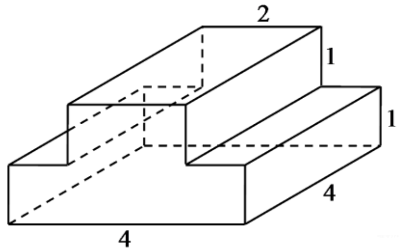
<u>или</u>

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−6; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Решение.
Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает, т. е. на интервалах (−3; 0) и (4,2; 7). В них содержатся целые точки −2, −1, 5 и 6, всего их 4.
Ответ: 4.

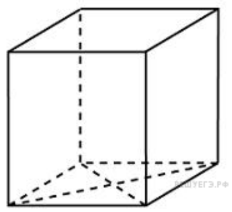
B9 **Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).**



Решение.
Площадь поверхности заданного многогранника равна сумме площадей параллелограммов со сторонами 2, 1, 4 и 4, 4, 1, уменьшенной на удвоенную площадь прямоугольника со сторонами 2, 4:
$$S = 2(4\cdot4+1\cdot4+1\cdot4)+2(2\cdot1+2\cdot4+1\cdot4)-2(2\cdot4)=60.$$
Ответ: 60

или

В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 248. Найдите боковое ребро этой призмы.

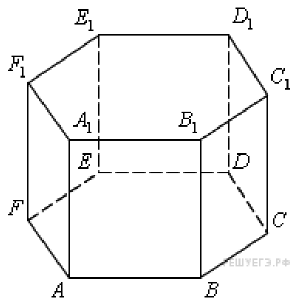


Решение.
Сторона ромба a выражается через его диагонали d_1 и d_2 как $a=\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2}=5$. Площадь ромба $S_P=\frac{1}{2}d_1d_2=24$.

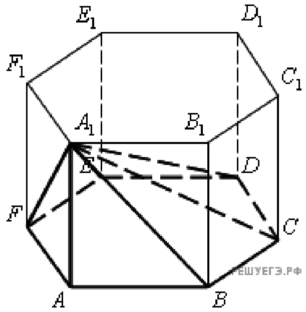
Тогда боковое ребро найдем из выражения для площади поверхности:
$$S=2S_{\text{ромба}}+4aH \Leftrightarrow H=\frac{S-2S_{\text{ромба}}}{4a}=\frac{248-48}{20}=10.$$
Ответ: 10.

или

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



Решение.



Основание пирамиды такое же, как основание правильной шестиугольной призмы, и высота у них общая. Поэтому

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{пр}}h_{\text{пр}}=\frac{1}{3}\cdot4\cdot3=4.$$

Ответ: 4.

ЧАСТЬ 2

B10

Найдите значение выражения $\frac{7\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}+\frac{5\sqrt{x}}{x}+3x-4$ **при** $x=3$**.**

Решение.

Поскольку $\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, имеем:

$$\frac{7\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}+\frac{5}{\sqrt{x}}+3x-4=\frac{7\sqrt{x}-5+5}{\sqrt{x}}+3x-4=7+3x-4=3x+3=12$$

Ответ: 12.

<u>или</u>

Найдите значение выражения $\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$**.**

Решение.

Выполним преобразования: $\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}=9^{\log_5 50-\log_5 2}=9^{\log_5 \frac{50}{2}}=9^2=81$.

Ответ: 81.

<u>или</u>

Найдите значение выражения $\frac{14\sin 19^\circ}{\sin 341^\circ}$**.**

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{14\sin 19^\circ}{\sin 341^\circ}=\frac{14\sin 19^\circ}{\sin(360-19)^\circ}=\frac{14\sin 19^\circ}{-\sin 19^\circ}=-14.$$

Ответ: -14.

<u>или</u>

Найдите значение выражения $\frac{2\sin(\alpha-7\pi)+\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\alpha+\pi)}$**.**

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{2\sin(\alpha-7\pi)+\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\alpha+\pi)}=\frac{-2\sin(\pi-\alpha)+\sin\alpha}{-\sin\alpha}=\frac{-2\sin\alpha+\sin\alpha}{-\sin\alpha}=1.$$

Ответ: 1.

B11 **Зависимость объема спроса *q* (единиц в месяц) на продукцию предприятия – монополиста от цены *p* (тыс. руб.) задается формулой *q= 100 – 10 p*. Выручка предприятия за месяц *r* (в тыс. руб.) вычисляется по формуле *r(p) = q·p*. Определите наибольшую цену *p*, при которой месячная выручка *r(p)* составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.**

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $r(p)\geq 240$:

$r(p)=q\cdot p=(100-10p)p=100p-10p^2,$

$r(p)\geq 240 \Leftrightarrow 10p^2-100p+240\leq 0 \Leftrightarrow p^2-10p+24\leq 0 \Leftrightarrow 4\leq p\leq 6.$

Ответ: 6.

или

Небольшой мячик бросают под острым углом $\propto$ к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} sin\,2 \propto$ (м), где $v_0 = 20$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ *м/с*^{2}). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $L \geq 20$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 20$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2:

$$\frac{20^2}{10}\sin 2\alpha \geq 20 \Leftrightarrow \sin 2\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30° + 360°n \leq 2\alpha \leq 150° + 360°n \underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow} 30° \leq 2\alpha \leq 150° \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 15° \leq \alpha \leq 75°.$$

Ответ: 15.

или

В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 90$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление задается формулой $R_{общ} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше *9 Ом*. Ответ выразите в омах.

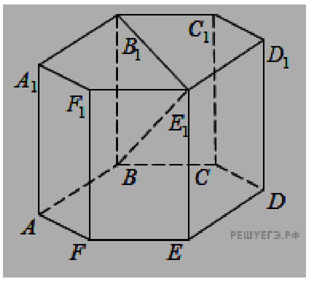
Решение.

Задача сводится к решению неравенства $R_{общ} \geq 9$ Ом при известном значении сопротивления приборов $R_1 = 90$ Ом:

$$R_{общ} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{90R_2}{90+R_2} \geq 9 \Leftrightarrow 81R_2 \geq 810 \Leftrightarrow R_2 \geq 10$$ Ом.

Ответ: 10.

B12 **В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны $\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1**



Решение.

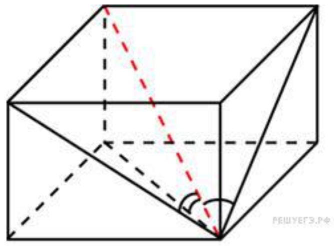
Рассмотрим прямоугольный треугольник BB_1E_1. По теореме Пифагора: $BE_1 = \sqrt{BB_1^2 + B_1E_1^2}$.

B_1E_1 — большая диагональ правильного шестиугольника, ее длина равна его удвоенной стороне. Поэтому $B_1E_1 = 2\sqrt{5}$. Поскольку $BB_1 = \sqrt{5}$ имеем:

$$BE_1 = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{5+4\cdot 5} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: 5.

<u>или</u>



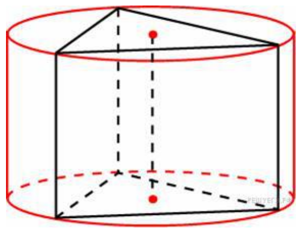
Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует углы 30°, 30° и 45° с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.

Решение.

Ребро параллелепипеда напротив угла в $45°$ равно $\sqrt{8}\sin 45° = 2$, поскольку образует с заданной диагональю и диагональю одной из граней равнобедренный треугольник. Два другие ребра по построению лежат в прямоугольных треугольниках напротив угла в $30°$ и равны половине диагонали. Тогда объем параллелепипеда: $2\cdot\frac{\sqrt{8}}{2}\frac{\sqrt{8}}{2} = 4.$

Ответ: 4

<u>или</u>



Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 2.

Решение.

Сторона правильного треугольника выражается через радиус описанной окружности как $a = \sqrt{3}r = 2\sqrt{3}\sqrt{3} = 6.$. Площадь боковой поверхности призмы тогда равна

$$S_{бок} = Ph = 3ah = 3\cdot 6\cdot 2 = 36.$$

Ответ: 36.

B13 **Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.**

Решение.

Пусть u км/ч – скорость течения реки, тогда скорость лодки по течению равна $11+u$ км/ч, а скорость лодки против течения равна $11-u$ км/ч. На обратный путь лодка затратила на 6 часов меньше, отсюда имеем:

$$\frac{112}{11-u} - \frac{112}{11+u} = 6 \Leftrightarrow \frac{224u}{(11-u)(11+u)} = 6 \Leftrightarrow \frac{112u}{121-u^2} = 3 \underset{u>0}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 112u = 3(121-u^2) \Leftrightarrow 3u^2 + 112u - 363 = 0 \Leftrightarrow$$

Таким образом, скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 3.

или

Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Решение.

Рабочий выполняет 1/15 часть заказа в час, поэтому за 3 часа он выполнит 1/5 часть заказа. После этого к нему присоединяется второй рабочий, и, работая вместе, два рабочих должны выполнить 4/5 заказа. Чтобы определить время совместной работы, разделим этот объём работы на совместную производительность:

$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} = 6$ часов.

Тем самым, на выполнение всего заказа потребуется 6 + 3 = 9 часов.

Ответ: 9.

<u>или</u>

Бизнесмен получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал за 2003 год?

Решение.

Бизнесмен получил в 2000 году прибыль в размере $b_1 = 5000$ рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300%, то есть в $q = 4$ раза, по сравнению с предыдущим годом. За 2003 год бизнесмен заработал

$b_4 = b_1 \cdot q^3 = 5000 \cdot 4^3 = 320000$ рублей.

Ответ: 320000.

B14 **Найдите наибольшее значение функции $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$ на отрезке [-3;3]**

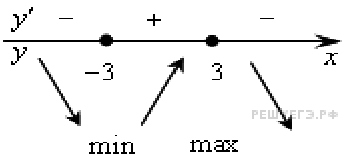
Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = 9 - x^2 = (3-x)(3+x).$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является:

$y(3) = 5 + 27 - 9 = 23.$

Ответ: 23.

<u>или</u>

Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2+289}{x}$

Решение.

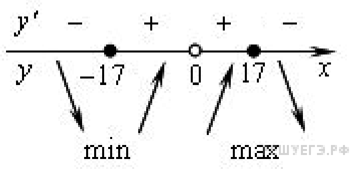
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x^2+289}{x}\right)' = -\left(x+\frac{289}{x}\right)' = -\left(1-\frac{289}{x^2}\right) = \frac{289-x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2 = 289 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 17, \\ x = -17. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 17$.

Ответ: 17.

<u>или</u>

Найдите точку минимума функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36}$

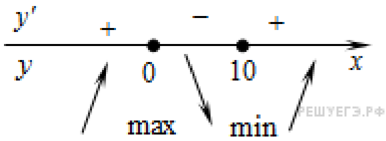
Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = (3x^2-36x+36)'e^{x-36} + (3x^2-36x+36)(e^{x-36})' =$$
$$= (6x-36)e^{x-36} + (3x^2-36x+36)e^{x-36} = (3x^2-30x)e^{x-36} = 3x(x-10)e^{x-36}.$$

Найдем нули производной: x=0 ,x =10

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 10$.

Ответ: 10.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

Для записи решений и ответов на задания С1-С7используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1,С2, т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

С1 а) **Решите уравнение** $4\cos^2 x + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$**.**

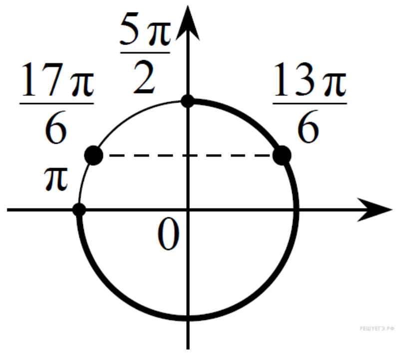
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$4 - 4\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2\sin x + 3)(2\sin x - 1) = 0$

Значит, или $\sin x = -\frac{3}{2}$ — уравнение не имеет корней, или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$



б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ *б)* $\frac{13\pi}{6}.$

<u>или</u>

Решите уравнение: $\sqrt{\sin x \cos x}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 2x} + 1\right) = 0.$

Решение.

Преобразуем уравнение:

$\sqrt{\sin x \cos x}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 2x} + 1\right) = 0. \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x + 1}{\operatorname{tg} 2x}\right) = 0.$

Откуда получаем, что

$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \operatorname{tg} 2x \neq 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} \operatorname{tg} 2x + 1 = 0, \\ \sin 2x \geq 0, \\ \operatorname{tg} 2x \neq 0 \end{cases}$

В первом случае решений нет. Во втором случае:

$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x + 1 = 0, \\ \sin 2x \geq 0, \\ \operatorname{tg} 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = -1, \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}., \\ \sin 2x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

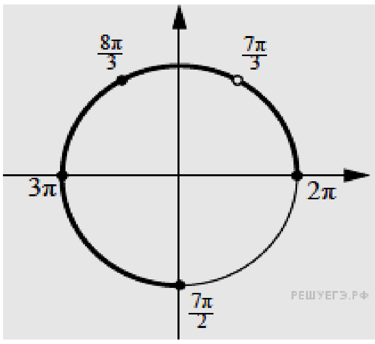
Ответ: $\frac{3\pi}{8} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

<u>или</u>

а) Решите уравнение $\frac{\cos 2x + \sqrt{3}\sin x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right].$

Решение.



а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases} \cos 2x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x - \sqrt{3} \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Условию $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \neq 0$ удовлетворяют только решения $x = \pi n$ и $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n.$

б) На отрезке $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности. Получаем: $2\pi; \ \dfrac{8\pi}{3}; \ 3\pi$

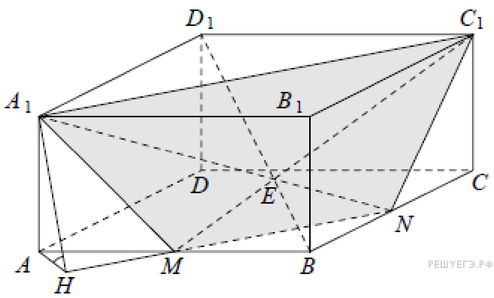
Ответ: а) $\pi n, \ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z};$ *б)* $2\pi; \ \dfrac{8\pi}{3}; \ 3\pi.$

C2 **В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной *2* , а высота призмы равна *1*. Точка E лежит на диагонали BD_1, причём $BE = 1$.**

а)Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E.

б)Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

*Решение***.**



а) Прямые AB и C_1E лежат в одной плоскости ABC_1 и пересекаются в точке M. Аналогично, BC и A_1E лежат в одной плоскости BCA_1 и пересекаются в точке N. Трапеция A_1C_1NM — искомое сечение.

б) $BD_1 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3,$ а $BE = 1.$

Поэтому $\dfrac{BE}{ED_1} = \dfrac{1}{2}.$

Из подобия треугольников D_1C_1E и BME находим, что $\dfrac{BM}{D_1C_1} = \dfrac{1}{2},$ откуда $BM = 1.$ Следовательно, $AM = 1.$ Аналогично, $BN = 1.$

Опустим перпендикуляр AH на прямую MN. По теореме о трёх перпендикулярах $A_1H \perp MN$, и, значит, $\angle A_1HA$ — искомый угол.

Из треугольника AHM находим, что $AH = \dfrac{AM}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ Тогда $\operatorname{tg}\angle A_1HA = \dfrac{AA_1}{AH} = \sqrt{2}.$

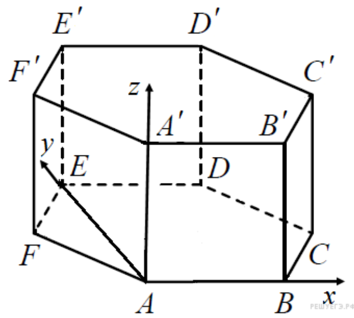
Ответ: б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$

<u>или</u>

В правильной шестиугольной призме *ABCDEFA'B'C'D'E'F'* все ребра равны 1. Найдите угол между прямой *AC'* и плоскостью *ACD'*.

Решение.

Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. В этой системе координат:



$A(0;0;0), C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), C'\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right), D'\left(1;\sqrt{3};1\right),$

откуда $\vec{AC'}=\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right).$

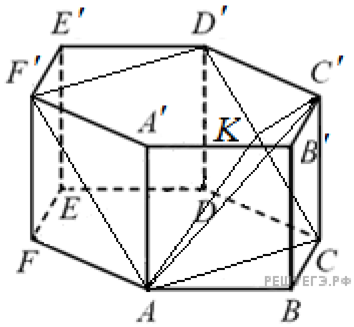
Плоскость ACD' проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид $Ax+By+Cz=0.$ Для координат точек C и D' имеем систему уравнений:
$$\begin{cases}\frac{3}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B+0C=0,\\ A+\sqrt{3}B+C=0.\end{cases}$$

Не теряя общности, положим $A=1$, тогда $B=-\sqrt{3}, C=2.$ Уравнение плоскости ACD': $x-\sqrt{3}y+2z=0,$ вектор нормали к ней $\vec{n}=(1;-\sqrt{3};2).$ Тогда искомый угол между прямой AC' и плоскостью ACD' равен

$$\arcsin\frac{|\vec{AC}\cdot\vec{n}|}{|\vec{AC}||\vec{n}|}=\arcsin\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+2\right|}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}+1}}=\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Приведем другое решение.



$\angle C'AK$ — искомый, так как это угол между прямой и ее проекцией AK.

$\angle C'KA=90°$, так как $ACD'\perp CC'D$ в силу того, что $AC\perp CC'$ и $AC\perp CD.$

Рассмотрим $\Delta AC'K: AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2;$

$KC'=\frac{1}{2}C'D=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (т. к. $C'D$ — диагональ квадрата $CC'DD'$)

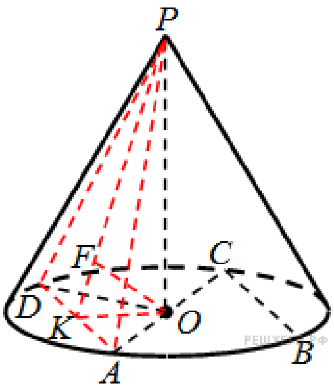
$$\angle C'AK=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2}\right)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}.$

<u>или</u>

Отрезок *AC* — диаметр основания конуса, отрезок *AP* — образующая этого конуса и *AP = AC*. Хорда основания *BC* составляет с прямой *AC* угол 60°. Через *AP* проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой *BC*. Найдите расстояние от центра основания конуса *O* до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

*Решение***.**



Пусть отрезок AD — хорда основания, параллельная BC. Тогда треугольник ADP является искомым сечением, так как плоскость ADP содержит прямую AP и прямую AD, параллельную BC. Опустим перпендикуляр PK на прямую AD. Согласно теореме о трех перпендикулярах OK также является перпендикуляром к AD, значит, $AD \perp (OPK)$.

Высота OF треугольника OPK лежит в плоскости OPK, следовательно, $OF \perp AD$ и $OF \perp PK$, значит, $OF \perp (ADP)$.

Далее находим:

1) из условия $AD || BC : \angle DAC = \angle BCA = 60°$;

2) из правильного треугольника AOD: $OK = \dfrac{AO\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) из прямоугольного треугольника APO: $PO^2 = AP^2 - AO^2 = 4R^2 - R^2 = 3$;

4) из прямоугольного треугольника KPO:

а) $KP = \sqrt{PO^2 + KO^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$;

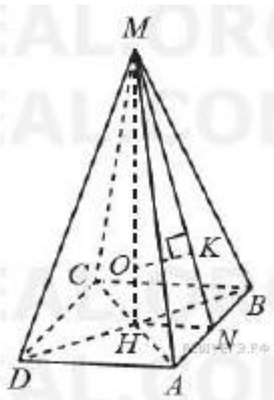
б) $OF = \dfrac{OK \cdot OP}{PK} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{15}} = \dfrac{3}{\sqrt{15}}$.

Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$.

<u>или</u>

В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 17, а высота равна 7, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Решение.



Пусть MH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной M, тогда треугольник AMH — прямоугольный, $MA = 17, MH = 7$, откуда $AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 4\sqrt{15}$.

Треугольник ABH — прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AB = AH\sqrt{2} = 4\sqrt{30}$.

В треугольнике AMB высота $MN = \sqrt{MA^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = 13$.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABH высота $HN = \dfrac{AB}{2} = 2\sqrt{30}$.

Центр O сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO : OK = MN : HN \Leftrightarrow \frac{7-r}{r} = \frac{13}{2\sqrt{30}} \Leftrightarrow (7-r) \cdot 2\sqrt{30} = 13 \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{26\sqrt{30} - 120}{7},$$

где r — радиус сферы.

Площадь сферы

$$S = 4\pi r^2 = \frac{480(289 - 52\sqrt{30})\pi}{49}.$$

Ответ:

$$\frac{480(289 - 52\sqrt{30})\pi}{49}.$$

. **C3** **Решите систему неравенств:** $\begin{cases} \log_{x+1}(2x-5) + \log_{2x-5}(x+1) \le 2,, \\ 25^x - 20^x - 2\cdot 16^x \le 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство: $\log_{x+1}(2x-5) + \dfrac{1}{\log_{x+1}(2x-5)} \le 2.$

Сделаем замену $y = \log_{x+1}(2x-5)$:

$$y + \frac{1}{y} \le 2; \frac{(y-1)^2}{y} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < 0, \\ y = 1. \end{array}\right.$$

Если $\log_{x+1}(2x-5) = 1$, то

$$\begin{cases} x + 1 = 2x - 5, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Если $\log_{x+1}(2x-5) < 0$, то $\begin{cases} \dfrac{(2x-5-1)}{(x+1-1)} < 0 \\ x+1 > 0 \\ 2x-5 > 0 \\ x+1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{x} < 0 \\ x > \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} < x < 3.$

Решение первого неравенства: $\dfrac{5}{2} < x < 3$ или $x = 6.$

Решим второе неравенство. Разделим обе части на 16^x :

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{4}\right)^x - 2 \le 0.$$

Сделаем замену $z = \left(\dfrac{5}{4}\right)^x$. Получаем: $z^2 - z - 2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le z \le 2.$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\left(\dfrac{5}{4}\right)^x \le 2 \Leftrightarrow x \le \log_{1,25} 2.$

Решение второго неравенства: $x \le \log_{1,25} 2.$

Пересечём полученные решения. Учитывая, что $3 < \log_{\frac{5}{4}} 2 < 6,$ находим множество решений системы: $\left(\dfrac{5}{2};\ 3\right).$

Ответ: $\left(\dfrac{5}{2};\ 3\right).$

или

Решите неравенство $\log_{x-1}\sqrt{x+2}\cdot\log_3\left(x^2-2x+1\right)\geq\log_9(10-x)$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2\log_{x-1}\sqrt{x+2}\cdot\log_3(x-1)\geq\log_9(10-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x-1)^{\log_{x-1}\sqrt{x+2}}\geq\log_9(10-x)\Leftrightarrow 2\log_3\sqrt{x+2}\geq\log_9(10-x)$$

при условиях $x>1$ и $x\neq 2$.

Далее:

$$\log_3(x+2)\geq\log_9(10-x)\Leftrightarrow\begin{cases}\log_9\left(x^2+4x+4\right)\geq\log_9(10-x),\\ x+2>0.\end{cases}$$

$x<10$

Учитывая условие $x>1$, неравенство $x+2>0$ можно опустить. Переходим к системе

$$\begin{cases}x^2+4x+4\geq 10-x,\\ 10-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+5x-6\geq 10-x,\\ x<10.\end{cases}$$

откуда $x\leq -6$ или $1\leq x<10$. Учитывая, что $x>1$ и $x\neq 2$, находим.

Ответ: $(1;\ 2)\cup(2;\ 10)$.

<u>или</u>

Решите неравенство: $\log_{\log_x 2x}(6x-2)\geq 0$.

*Решение***.**

Область допустимых значений неравенства задается соотношениями:

$$\begin{cases}\log_x 2x>0,\\ \log_x 2x\neq 1,\\ 6x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2},\\ x>1.\end{array}\right.$$

На области допустимых значений справедливы равносильности:

$$\log_a b\geq 0\Leftrightarrow\frac{b-1}{a-1}\geq 0,\ \log_a b-\log_a c\geq 0\Leftrightarrow\frac{b-c}{a-1}\geq 0,\ a^b-a^c\geq 0\Leftrightarrow(a-1)(b-c)\geq 0.$$

Поэтому на ОДЗ имеем:

$$\log_{\log_x 2x}(6x-2)\geq 0\Leftrightarrow\frac{6x-3}{\log_x 2x-1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{3(2x-1)}{\log_x 2x-\log_x x}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x-1}{x(x-1)}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x\leq\dfrac{1}{2},\\ x>1.\end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ получаем ответ.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{2}\right)\cup(1;\ +\infty)$.

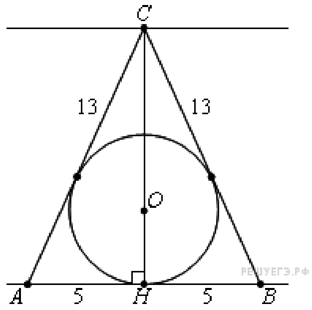
С4

Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C а на другой — точки A и B причем треугольник ABC — равнобедренный и его боковая сторона равна *13*. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC

Решение.

Заметим, что либо $AC = BC$, либо $AB = BC$ (или $AB = AC$).

Первый случай (рис. 1).



$AC = BC = 13.$ Пусть H — точка касания вписанной окружности треугольника ABC с основанием AB .— r_1 радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

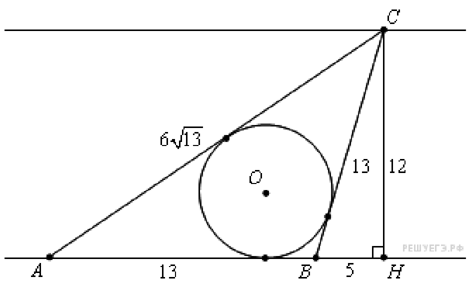
Тогда CH — высота и медиана треугольника ABC.

Из прямоугольного треугольника AHC находим, что $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$

Тогда

$S_{\Delta ABC} = AH \cdot HC = 5 \cdot 12 = 60,$ но

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r_1 = 18r_1.$$



Из равенства $18r_1 = 60$ находим, что $r_1 = \dfrac{10}{3}.$

Второй случай. (рис. 2)

Пусть $AB = BC = 13, CH$ — высота треугольника ABC, r_2 — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда

$BH = 5,\ AH = AB + BH = 13 + 5 = 18.$

Из прямоугольного треугольника ACH находим, что

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 78,\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot r_2 = (13 + 3\sqrt{13})r_2.$$

Из равенства $(13 + 3\sqrt{13})r_2 = 78$ получаем, что $r_2 = \dfrac{3(13 - 3\sqrt{13})}{2}.$

Рассмотрим третий случай.

Третий случай состоит в том, что $BC = AB$ и эти стороны образуют острый угол. Тогда высота CHбудет лежать внутри треугольника ABC и $AC = 4\sqrt{13}.$

В этом случаем радиус будет равен $r_3 = \dfrac{2}{3}(13 - 2\sqrt{13}).$

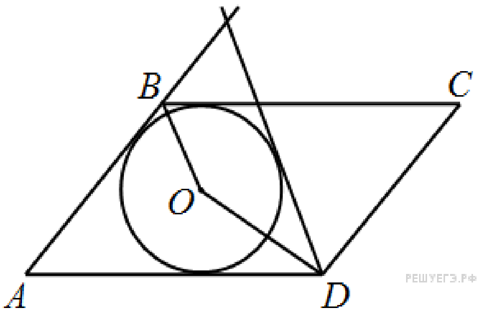
Ответ: $\dfrac{10}{3},\ \dfrac{3}{2}(13 - 3\sqrt{13}),\ \dfrac{2}{3}(13 - 2\sqrt{13}).$

или

Дан параллелограмм $ABCD$, AB = 3, BC = 5, $\angle A$ = 60°. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.

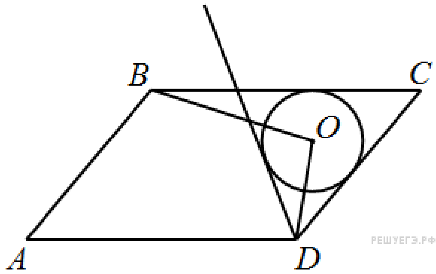
Окружностей две: каждая из них вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 соответственно. Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r=\dfrac{5\cdot\sin 60^\circ}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}.$



Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}AD\cdot r=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6}=\frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r=\dfrac{3\cdot\sin 60^\circ}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$



Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD}=AB\cdot AD\cdot\sin 60^\circ-\frac{1}{2}BC\cdot r-\frac{1}{2}CD\cdot r=\frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$.

<u>или</u>

Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2 если $\angle ABO_1=30^\circ$

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=30^\circ$, откуда $AB=2O_1A\cos 30^\circ=4\cos 30^\circ$, $AC=2O_2C\cos 30^\circ=6\cos 30^\circ$.

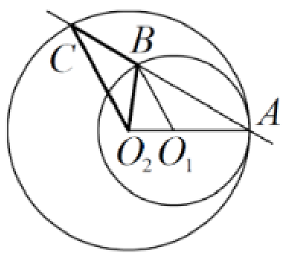


Рис. 1

<u>Возможны два случая.</u>

Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=2\cos 30^\circ$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=3\cos 30^\circ\sin 30^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, откуда $BC=AC+AB=10\cos 30^\circ$.

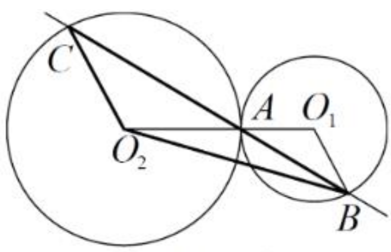


Рис. 2

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=15\cos 30^\circ\sin 30^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ *или* $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

<u>или</u>

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

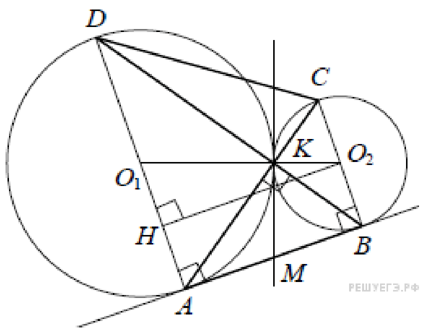
а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение.

а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный. Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично, получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая — радиус 1.



Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC} = 4.$

Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC},$ то есть $S_{AKB} = 4S$.

Аналогично, $S_{CKD} = 4S$.

Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1: $O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0{,}8$ и $S_{AKB} = 4S = 3{,}2$.

Ответ: 3,2.

C5 **31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами**?

Решение.

Пусть x — один из трёх разовых платежей. Тогда сумма долга после оплаты в первом году составит: $9930000 \cdot 1{,}1 - x.$ После внесения второго платежа сумма долга станет равной $(9930000 \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x.$ Сумма долга после третьего платежа: $((9930000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x.$ Третьим платежом Сергей должен погасить долг, то есть долг станет равным нулю:

$$((9930000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x = 0 \Leftrightarrow 9930000 \cdot 1,1^3 - 1,1(1,1x + x) - x = 0 \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow 9930000 \cdot 1,1^3 - 3,31x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9930000 \cdot 1,1^3}{3,31} = 3993000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 3 993 000 рублей

или

Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк 3/4 от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S у.е., а процентная ставка по кредиту $x\%.$ К концу первого года сумма долга фермера в банк с учетом начисленных процентов составила $(1 + 0,01x)S$ у.е.

После возвращения банку 3/4 части от суммы долга долг фермера на следующий год составил $\frac{1}{4}(1 + 0,01x)S$ у.е.

На эту сумму в следующем году вновь начислены проценты. Сумма долга фермера к концу второго года погашения кредита с учетом процентной ставки составила $\frac{1}{4}(1 + 0,01x)^2 S$ у.е. По условию задачи эта сумма равна $1,21S$ у.е.

Решим уравнение $\frac{1}{4}(1 + 0,01x)^2 S = 1,21S$ на множестве положительных чисел.

$$(1 + 0,01x)^2 = 4 \cdot 1,21 \Leftrightarrow 1 + 0,01x = 2 \cdot 1,1 \Leftrightarrow 0,01x = 1,2 \Leftrightarrow x = 120.$$

Ответ: 120.

или

Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40%. К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение.

Пусть банк первоначально принял вклад в размере *S* у.е. под *x%* годовых. Тогда к началу второго года сумма стала *S(1 + 0.01x)* у.е.

После снятия четверти накопленной суммы на счету осталось $\frac{3s}{4}(1 + 0,01x)$ у.е.

С момента увеличения банком процентной ставки на 40% к концу второго года хранения остатка вклада накопленная сумма стала

$\frac{3s}{4}(1 + 0,01x) \cdot (1 + (x + 40) \cdot 0,01)$ у.е.

По условию задачи эта сумма равна *1.44 S* у.е.

Решим уравнение $\frac{3s}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)=1{,}44s.$

$\frac{3s}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)=1{,}44s \Leftrightarrow (1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)=1{,}92 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (100+x)\cdot(100+(x+40))=19200 \Leftrightarrow (100+x)\cdot(140+x)=19200 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+240x+14000-19200=0 \Leftrightarrow x^2+240x-5200=0 \Leftrightarrow x=-120\pm\sqrt{14400+5200} \Leftrightarrow$

$x_1=20$; $x_2=-260$

Этот корень не подходит по смыслу задачи: $x_2=-260.$

Новые годовые составляют 20 + 40 = 60 %.

Ответ: 60.

<u>или</u>

Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24000 рублей?

Решение.

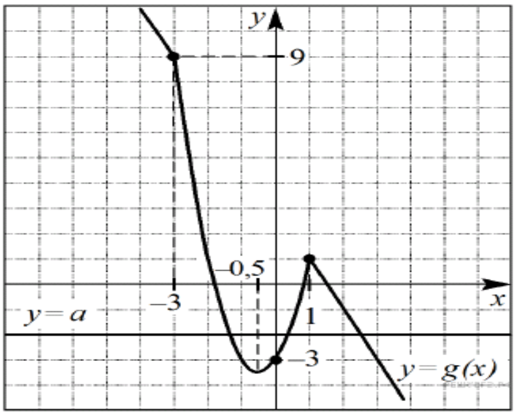
Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a %. Тогда в последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. Составим таблицу выплат.

Год	**Долг банку (руб.)**	**Остаток доли после выплаты (руб.)**
0	100000	–
1	110000	86000
2	94600	70600
3	77660	53660
4	59026	35026
5	38528,6	14528,6
6	15981,46	0

Значит, Оля погасит кредит за 6 лет.

Ответ: 6.

С6 **Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f(x)=x^2-|x^2+2x-3|-a$ пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.**



Решение.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=x^2-|x^2+2x-3|$. График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трёх или более точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет более двух различных корней.

Если $x\le -3$ или $x\ge 1$, то $|x^2+2x-3|=x^2+2x-3$, и $g(x)=-2x+3.$

Если $-3 < x < 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$, и $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней только если $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) < a < g(1)$. Соответствующие значения функции g равны: $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3{,}5;\quad g(1) = 1$.

Ответ: $-3{,}5 < a < 1$.

<u>или</u>

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $\left|\dfrac{5}{x} - 3\right| = ax - 1$ **на промежутке** $(0, +\infty)$ **имеет более двух корней.**

Решение.

Рассмотрим функции $f(x) = ax - 1$ и $g(x) = \left|\dfrac{5}{x} - 3\right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(0, +\infty)$.

При $a \le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0, +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \le 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0, +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0, \dfrac{5}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0, \dfrac{5}{3}\right]$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда, $f\left(\dfrac{5}{3}\right) \ge g\left(\dfrac{5}{3}\right)$, откуда получаем $a \cdot \dfrac{5}{3} - 1 \ge 0$, то есть $a \ge \dfrac{3}{5}$.

На промежутке $\left(\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax - 1 = 3 - \dfrac{5}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 - 4x + 5 = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 16 - 20a$, поэтому при $a > \dfrac{4}{5}$ это уравнение не имеет корней, при $a = \dfrac{4}{5}$ уравнение имеет единственный корень, равный $\dfrac{5}{2}$, при $0 < a < \dfrac{4}{5}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0 < a < \dfrac{4}{5}$, то больший корень $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{D}}{2a} > \dfrac{4}{2a} > 2 > \dfrac{5}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда $a\left(x_1 - \dfrac{5}{3}\right)\left(x_2 - \dfrac{5}{3}\right) = a \cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 - 4 \cdot \dfrac{5}{3} + 5 = \dfrac{25a - 15}{9} > 0$, то есть $a > \dfrac{3}{5}$.

Таким образом, исходное уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-1$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0,+\infty)$:

— нет корней при $a\le 0$;

— один корень при $0<a<\frac{3}{5}$ и $a>\frac{4}{5}$;

— два корня при $a=\frac{3}{5}$ и $a=\frac{4}{5}$;

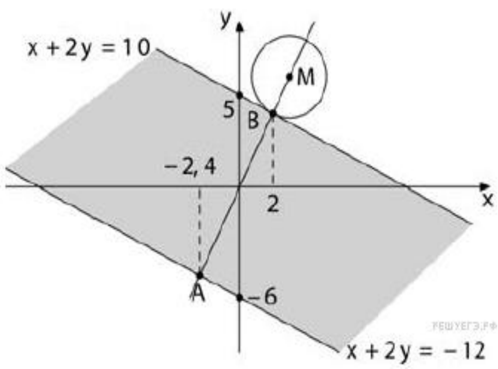
— три корня при $\frac{3}{5}<a<\frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}<a<\frac{4}{5}$.

<u>или</u>

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} |x+2y+1|\le 11,\\ (x-a)^2+(y-2a)^2=2+a \end{cases}$$



Решение.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} -12\le x+2y\le 10,\\ (x-a)^2+(y-2a)^2=2+a. \end{cases}$$

Неравенство $-12\le x+2y\le 10$ задаёт на плоскости полосу, граница которой — пара параллельных прямых: $x+2y=10$ и $x+2y=-12$.

Если $a<-2$, то система не имеет решений, поскольку правая часть уравнения становится отрицательной. Если $a=-2$, то уравнение принимает вид: $(x+2)^2+(y+4)^2=0$ и задаёт единственную точку $(-2;\ -4)$, координаты которой удовлетворяют неравенству: $|-2-8+1|=9<11$. Следовательно, при $a=-2$ система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $a>-2$. Тогда уравнение $(x-a)^2+(y-2a)^2=2+a$ определяет окружность радиусом $\sqrt{2+a}$. Центр $M(a;2a)$ окружности лежит на прямой y=2x, которая перпендикулярна граничным прямым полосы и пересекает их в точках $A(-2{,}4;\ -4{,}8)$ и $B(2;4)$. Система имеет единственное решение, если только окружность внешним образом касается полосы в точке A или в точке B. Если точка касания — A, то $a<-2{,}4$, что невозможно. Окружность касается полосы в точке B, только если $a>2$ и $MB=r$. Получаем:

$$(a-2)^2+(2a-4)^2=2+a\Leftrightarrow 5a^2-21a+18=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3,\\ a=1{,}2. \end{array}\right.$$

Условию $a>2$ удовлетворяет только корень $a=3$.

Ответ: $-2;\ 3$.

<u>или</u>

Известно, что значение параметра *a* таково, что система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это значение параметра *a* и решите систему при найденном значении параметра.

Решение.

Из первого уравнения системы получаем $2^{\ln y} = 4^{|x|} \Leftrightarrow y = e^{2|x|}$.

Заметим, что если пара $(x; y)$ — решение системы, то пара $(-x; y)$ — также решение этой системы. Поскольку система имеет единственное решение, то этим решением может быть только пара $(0; y)$. Таким образом, $x = 0$ и из второго уравнения получаем:

$$\log_2(2a^2) = \log_2 1 + 1 \Leftrightarrow \log_2(2a^2) = 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &a = 1, \\ &a = -1. \end{aligned}\right.$$

Проверим, действительно ли система при найденных значениях а имеет единственное решение.

1. Если $a = 1$, то система действительно имеет единственное решение:

$$\log_2(x^4y^2 + 2) = \log_2(1 - x^2y^2) + 1 \Leftrightarrow x^4y^2 + 2 = 2 - 2x^2y^2 \Leftrightarrow y^2(x^4 + 2x^2) = 0 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

Тогда $y = e^0 = 1$.

2. Если $a = -1$, то система имеет три решения:

$$\log_2(x^4y^2 + 2) = \log_2(1 + x^2y^2) + 1 \Leftrightarrow x^4y^2 + 2 = 2 + 2x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^4 - 2x^2) = 0 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 0, \\ &x = \sqrt{2}, \\ &x = -\sqrt{2}. \end{aligned}\right.$$

Каждому из найденных значений *x* соответствует единственное значение $y = e^{2|x|}$

Ответ: система имеет единственное решение $(0; 1)$ *при* $a = 1$.

C7 **Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.**

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

Решение.

а) Например, можно купить 14 красных и 18 синих карандашей:

14 · 17 + 18 · 13 = 472 (руб.).

б) Дешевле всего 35 карандашей будут стоить, если купить наибольшее возможное число синих карандашей и наименьшее возможное число красных, то есть если купить 15 красных и 20 синих, поскольку если красных меньше 15, то синих больше 20, и в этом случае разность между числом красных и синих больше чем 5. Но тогда стоимость покупки

$15 \cdot 17 + 20 \cdot 13 = 515$ (руб.),

что больше, чем имеющаяся сумма 495 рублей.

в) Пусть n и m —число синих и красных карандашей соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 17m + 13n \le 495, \\ |m-n| \le 5, \\ m,\ n = 0,\ 1, 2,\ \dots \end{cases}$$

Положим $s = n + m$, тогда

$$\begin{cases} 4m + 13s \le 495, \\ -5 \le 2m - s \le 5, \\ m = 0,\ 1,\ \dots,\ s, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{495-13s}{4}, \\ \dfrac{s-5}{2} \le m \le \dfrac{s+5}{2}, \\ m = 0,\ 1,\ \dots,\ s, \end{cases}$$

Следовательно, $\dfrac{s-5}{2} \le \dfrac{495-13s}{4}$, откуда $s \le 33\dfrac{2}{3}$.

Можно купить не больше 33 карандашей. Осталось проверить, возможен ли случай, когда $s = 33$. При $m = 14$, $n = 19$ получаем

$14 \cdot 17 + 19 \cdot 13 = 485 < 495$.

Значит, наибольшее возможное число карандашей 33.

Ответ: а) да; б) нет; в) 33.

или

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Решение.

а) Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетило не более 4 мальчиков, поскольку если бы их было 5 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$, что больше $\frac{4}{13}$. Аналогично, кино посетило не более 6 мальчиков, поскольку $\frac{7}{7+9}=\frac{7}{16}>\frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе – 10.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

Из условия:

$\frac{m_1}{m_1+d}\le\frac{4}{13}, \frac{m_2}{m_2+d}\le\frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d}\le\frac{4}{9}, \frac{m_2}{d}\le\frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\le\frac{10}{9}$,

поэтому доля девочек в группе: $\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\ge\frac{1}{\frac{10}{9}+1}=\frac{9}{19}$.

Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{19}$.

Ответ: а) да: б) 10; в) $\frac{9}{19}$.

<u>или</u>

Найдите все пары (x;y) целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2<18x-20y-166, \\ 32x-y^2>x^2+12y+271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем: $\begin{cases} (x-9)^2+(y+10)^2<15, \\ (x-16)^2+(y+6)^2<21, \\ x,y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

Из первого и второго неравенств системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2<15, \\ (x-16)^2<21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\le x\le 12, \\ 12\le x\le 20 \end{cases} \Leftrightarrow x=12.$$

Подставляя $x=12$ в систему, получаем

$$\begin{cases} (y+10)^2<6, \\ (y+6)^2<5, \\ y\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le y+10\le 2, \\ -2\le y+6\le 2, \\ y\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12\le y\le -8, \\ -8\le y\le -4, \\ y\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow y=-8.$$

Ответ: $(12;-8)$.